



Olimpiada de Matematică –etapa locală - Galați

13 februarie 2010

Clasa a XII-a

SOLUȚII

Problema 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât $\forall x, y \in A, x \cdot (y^2 - y) = (y^2 - y) \cdot x$.

Să se demonstreze că inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ.

Visilina Guiță, profesor, Galați

Soluție: Relația din ipoteză $\Leftrightarrow x \cdot y^2 - x \cdot y = y^2 \cdot x - y \cdot x, \forall x, y \in A (*)$. În această relație substituim pe y cu $-y$ și conform regulilor de calcul într-un inel obținem $x \cdot y^2 + x \cdot y = y^2 \cdot x + y \cdot x, \forall x, y \in A (**)$. Ținând cont de $(*), (**)$ și regulile de calcul într-un grup se obține $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A$.

Problema 2. Fie (G, \cdot) un subgrup al grupului multiplicativ (\mathbb{R}^*, \cdot) și F mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile și surjective care satisfac condiția $(\forall) x \in \mathbb{R}, f'(x) \in G$. Să se demonstreze că mulțimea F în raport cu operația de compunere a funcțiilor este grup.

Marian Baroni, profesor, Galați

Soluție: Compunerea funcțiilor este lege de compoziție internă pe mulțimea F deoarece $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \in G$ pentru că produsul a două elemente din G aparține tot lui G . Compunerea funcțiilor este, în general, asociativă, iar funcția identică $1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}(x) = x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ este din mulțimea F și este element neutru în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

Cum funcția $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, atunci

$f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ sau $f'(x) < 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict monotonă $\Rightarrow f$ este injectivă.

Funcția f este și surjectivă, rezultă că f este bijectivă, deci inversabilă. Cum derivata

funcției f nu se anulează atunci f^{-1} este derivabilă și pentru fiecare y ,

$$\left(f^{-1}\right)'_{(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \in G, \text{ deoarece } f'(f^{-1}(y)) \in G \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \in G. \text{ Așadar,}$$

(F, \circ) este grup.

Problema 3. Se consideră $I_n = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$

a) Să se calculeze I_1 și I_2 .

b) Să se calculeze $I_n, \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Soluție. Avem că $2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12 = (2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 3) + 2 \cdot x + 3.$

a) Rezultă că

$$I_1 = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{x^2 + 3 \cdot x + 3} dx = \int \left(2 \cdot x + 3 + \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 3 \cdot x + 3} \right) dx = x^2 + 3 \cdot x + \ln(x^2 + 3 \cdot x + 3) + C$$

$$I_2 = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^2} dx = \int \left(\frac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 3 \cdot x + 3} + \frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^2} \right) dx = \ln(x^2 + 3 \cdot x + 3) -$$

$$- \frac{1}{x^2 + 3 \cdot x + 3} + C$$

b)

$$I_n = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx = \int \frac{(2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 3) + 2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx =$$

$$= \int \left(\frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-1}} + \frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-2}} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-1}} + C$$

Problema 4. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ definite astfel:

$$a_n = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x+1) \cdot dx, \text{ iar } b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Soluţie:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 \left(x - x^2 + x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^n \right) \cdot \ln(x+1) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1 - (-x)^n}{1+x} \right) \cdot \ln(1+x) \cdot dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} \cdot \ln(x+1) \cdot dx + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \cdot \ln(1+x) \cdot dx. \\ I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} \cdot \ln(x+1) \cdot dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} \cdot \ln(1+x) \cdot dx = \int_0^1 \ln(1+x) \cdot dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \cdot \ln(x+1) = \\ &= \int_0^1 x' \cdot \ln(1+x) \cdot dx - \frac{\ln^2(x+1)}{2} \Big|_0^1 = \\ &= x \cdot \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot dx - \frac{\ln^2 2}{2} = \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx - \frac{\ln^2 2}{2} = \ln 2 - \int_0^1 dx + \ln(x+1) \Big|_0^1 - \frac{\ln^2 2}{2} = \ln 2 - 1 + \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \frac{\ln^2 2}{2}. \end{aligned}$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(1+x)}{1+x} \leq \ln 2 \Rightarrow \left| \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \right| \leq \ln 2 \cdot x^{n+1}.$$

$$\text{Rezultă că } \left| \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \cdot dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \right| \cdot dx \leq \ln 2 \cdot \int_0^1 x^{n+1} \cdot dx = \frac{\ln 2}{n+2}.$$

$$\text{În concluzie, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \cdot \ln(1+x) \cdot dx = 0.$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \frac{\ln^2 2}{2}.$$